Wiederholung Stochastik

Das ist nur eine Zusammenfassung!
Das Beherrschen und das Verständnis dieser Inhalte ist unabdingbare Voraussetzung für die kommenden Themen! Der sichere Umgang mit den Begriffen ist absolut notwendig!

1. Versuchsausgänge von Zufallsexperimenten heißen *Ergebnisse* ω. Alle möglichen Versuchsausgänge werden zum *Ergebnisraum* Ω zusammengefasst:
$$\Omega = \{\omega_1; \omega_2; \ldots; \omega_n\}$$
Ω ist also eine Menge, daher steht in ihr nie ein Element zweimal. Die Anzahl ihrer Elemente ω_i wird mit $|\Omega|$ bezeichnet und *Mächtigkeit* genannt. Baumdiagramme oder systematisches Abzählen helfen bei der Bestimmung von Ω.

2. Teilmengen des Ergebnisraums bilden ein *Ereignis*. Sie sind Mengen und werden mit Großbuchstaben bezeichnet. Besondere Ereignisse sind: Das *Gegenereignis* $\overline{E}$ („E quer“) zu einem Ereignis E enthält alle Ergebnisse aus Ω, die nicht in E enthalten sind. Ein *Elementarereignis* enthält genau ein Ergebnis. Das *unmögliche Ereignis* enthält kein Ergebnis, ist also die leere Menge. Das *sichere Ereignis* enthält alle Elemente aus Ω.

3. Wird ein Zufallsexperiment n-mal durchgeführt und tritt ein Ergebnis k-mal dabei auf, so bezeichnet man k als die *absolute Häufigkeit* dieses Versuchsergebnisses. Der Quotient $\frac{k}{n}$ heißt *relative Häufigkeit*. Die Erfahrung lehrt, dass sich die relative Häufigkeit nach einer „großen“ Anzahl von Versuchen einem festen Wert annähert. Dies bezeichnet man als *Gesetz der großen Zahlen*.

4. Bei vielen Zufallsexperimenten ist davon auszugehen, dass alle möglichen Versuchsausgänge gleich wahrscheinlich sind. Solche Experimente werden dann *Laplace-Experimente* bezeichnet. Mit der Bezeichnung P für die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses gilt dann:
$$P(\{\omega_1\}) = P(\{\omega_2\}) = \ldots = P(\{\omega_n\})$$
Damit können dann bei Laplace-Experimenten Wahrscheinlichkeiten für Ereignisse E berechnet werden:
$$P(E) = \frac{\text{Anzahl der Elemente von } E}{\text{Anzahl der Elemente von } \Omega} = \frac{|E|}{|\Omega|}$$

5. Zufallsexperimente, bei denen mehrere Teilexperimente nacheinander ausgeführt werden, bezeichnet man als *zusammengesetzte Zufallsexperimente* oder auch als *mehrstufige Zufallsexperimente*. Sie können in einem Baumdiagramm dargestellt werden, wobei dann jedem Ergebnis des Experiments ein Pfad durch den Baum entspricht. Dabei gelten für die Wahrscheinlichkeiten folgende Regeln:
   - Die Summe der Wahrscheinlichkeiten an den Ästen, die von einem Knoten ausgehen, beträgt immer 1.
   - Die Wahrscheinlichkeit eines Ergebnisses (genauer: des zugehörigen Elementarereignisses) ist gleich dem Produkt der Wahrscheinlichkeiten auf dem Pfad, die zu diesem Ergebnis führen. („1. Pfadregel“)
   - Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses ist die Summe aller Wahrscheinlichkeiten, die zu diesem Ereignis führen. („2. Pfadregel“)

6. Hat man bei einem Zufallsexperiment zwei Ereignisse A und B, können folgende Situationen unterschieden werden:

   – Beide Ereignisse treten ein, dh. der Ausgang des Zufallsexperiments ist ein Ergebnis, das zu beiden Ereignissen A und B gehört. Es muss also in der Schnittmenge der beiden Mengen liegen: $A \cap B$.
   Man sagt dann auch: „A **und** B treten ein.“

   – Mindestens eines der beiden Ereignisse tritt ein. Der Ausgang des Zufallsexperiments muss also entweder in A oder in B oder auch in beiden Mengen gleichzeitig liegen. Mathematisch spricht man hier: „Das Ergebnis liegt in A **oder** B“. Beachte also: Das mathematische Oder beinhaltet auch den Fall „in A **und** B“! Schreibweise hierfür ist die Vereinigungsmenge: $A \cup B$

   – Man interessiert sich dafür, ob das Eintreten eines Ereignisses für das andere Ereignis von Bedeutung ist. Man spricht dann von bedingten Wahrscheinlichkeiten: Genauer definiert man: Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Ereignis B eintritt, wenn man weiß, dass das Ereignis A eingetreten ist, wird als *bedingte Wahrscheinlichkeit von B unter der Voraussetzung A* bezeichnet. Man schreibt hierfür: $P_A(B)$. Ist $P(A) \neq 0$ kann diese Wahrscheinlichkeit mit folgender Formel berechnet werden:

   $$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \quad \text{bzw.} \quad P(A \cap B) = P(A) \cdot P_A(B)$$

   Beachte hier, dass es bei bedingten Wahrscheinlichkeiten prinzipiell **zwei** Möglichkeiten gibt, je nachdem welches Ereignis die Voraussetzung ist! Vielfach ist es günstig sich den Sachverhalt in einem Baumdiagramm zu veranschaulichen, in dem dann die Voraussetzung als erste Stufe zu zeichnen ist.

   – Zwei Ereignisse A und B zerlegen den Ergebnisraum Ω in vier Mengen, die paarweise kein Element gemeinsam haben. Man spricht dann von *disjunkten* Mengen. Ihre Schnittmenge ist die leere Menge. Die Zerlegung von Ω kann durch die Vierfeldertafel (VFT) sehr gut veranschaulicht werden. Zusätzlich können in die VFT sowohl absolute Häufigkeiten als auch relative Häufigkeiten und sogar Wahrscheinlichkeiten eigetragen werden:

	B	$\overline{B}$
A	$A \cap B$	$A \cap \overline{B}$
$\overline{A}$	$\overline{A} \cap B$	$\overline{A} \cap \overline{B}$

	B	$\overline{B}$
A	$P(A \cap B)$	$P(A \cap \overline{B})$
$\overline{A}$	$P(\overline{A} \cap B)$	$P(\overline{A} \cap \overline{B})$